المحددات والمصفوفات

يبدو أن أول استخدام للمصفوفات كان في الكتاب الصيني "تسعة كتب في الحساب" قبيل بداية التاريخ الميلادي، بينما أول المحددات استخدمت من طرف الياباني *Seki Kōwa* سنة ١٦٨٣م..

وتعد المحددات والمصفوفات موضوعا رئيسيا في أحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر الخطي.

و من تطبيقاتها: حل المعادلات الخطية وحل المسائل باستخدام الحاسوب.

١. تعريف المصفوفات:

تعريف ١: مصفوفة أعداد حقيقية من الرتبة $m \times n$ هي قائمة أعداد حقيقية، تسمى عناصرها، ومرتبة على شكل صفوف وأعمدة، بحيث عدد الصفوف يساوي m وعدد الأعمدة يساوي n .

يمكن الإشارة إلى أنّ المصفوفات 1×1 هي أعداد حقيقية.

مثال ١: المصفوفات التالية من الرتبة 2×3 ، 3×2 ، 4×1 ، 1×5 ، و 3×3 على الترتيب:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -0.6 & 2 & 17 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0.7 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

تساوي مصفوفتين:

تعريف ٢: تكون مصفوفتان من الرتبة نفسها متساويتين إذا تساوت عناصرهما (الموافقة) على الترتيب..

مثال ٢: نعتبر مصفوفات المعطاة في المثال السابق والمصفوفتين التاليتين:

$$F = \begin{pmatrix} 3+2 & 2 & -1 \times 3 \\ 1 & 0 & 0.7 \\ 2 & 2-6 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0.7 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \neq B$ لأنهما من رتبتين مختلفتين، وكذلك $E \neq G$ لأنه يوجد عنصران غير متساويين (الصف الثاني والعمود الثاني)، بينما $E = F$.

٢. عمليات على المصفوفات:

١,٢ الجمع والطرح:

تعريف ٣: حاصل جمع (أو طرح) مصفوفتين من الرتبة نفسها هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو مجموع (أو طرح) العنصرين الموافقين له من المصفوفتين.

مثال ٣: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ A+B, \qquad 2)\ B-A.$$

الحل:

$$1)\ A+B=\begin{pmatrix} 2-2 & 4+0 & 7+1 \\ -6+3 & 3+4 & -1+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2)\ B-A=\begin{pmatrix} -2-2 & 0-4 & 1-7 \\ 3-(-6) & 4-3 & 7-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

نظرية ١: جمع المصفوفات تبديلي وتجميعي.

مثال ٤: نعتبر المصفوفات المعطاة في المثال السابق. احسب ما يلي:

$$1)\ B+A, \qquad 2)\ B+(A+B), \qquad 3)\ B+B+A.$$

الحل:

1) نستخدم نتيجة الفقرة 1 من المثال السابق وبأن الجمع تبديلي:

$$B+A=A+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2) نستخدم نتيجة الفقرة 1 من هذا المثال وبأن الجمع تجميعي:

$$B+(A+B)=(B+A)+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

3) نستخدم نتيجة الفقرة 2 من هذا المثال وبأن الجمع تبديلي وتجميعي:

$$B+B+A=B+A+B=B+(A+B)=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

٢,٢ ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

تعريف٤: ضرب (أو قسمة) مصفوفة في (أو على) عدد حقيقي هو مصفوفة من الرتبة نفسها ، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب (أو قسمة) العنصر الموافق له من المصفوفة (الأصلية) في (أو على) العدد الحقيقي.

مثال٥: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}.$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ 3A,\qquad 2)-A+2B,\qquad 3)\ \frac{B}{-2}.$$

الحل:

$$1)\ 3A=3\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 3 & 3\times 0\\ 3\times 1 & 3\times 2\\ 3\times 6 & 3\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

$$2)-A+2B=-1\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -1 & -2\\ -6 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -4\\ 6 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -6\\ 0 & -4.2\end{pmatrix}$$

$$3)\ \frac{B}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}\frac{0.5}{-2} & \frac{1}{-2}\\ \frac{0}{-2} & \frac{-2}{-2}\\ \frac{3}{-2} & \frac{0.4}{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.25 & -0.5\\ 0 & 1\\ -1.5 & -0.2\end{pmatrix}$$

نظرية٢: ضرب مصفوفة في عدد حقيقي تبديلي وتجميعي (أي بالنسبة للضرب في عدد آخر).

مثال٦ : نعتبر مصفوفات المعطاة في المثال السابق. احسب ما يلي:

$$1)\ A\times 3\qquad 2)\ 1.5(2A)$$

الحل:

1) نستخدم نتيجة الفقرة (1) من المثال السابق وبأنّ العملية تبديلية:

$$A\times 3=3A=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

2) نستخدم نتيجة الفقرة (1) من المثال السابق وبأنّ العملية تجميعية:

$$1.5(2A)=(1.5\times 2)A=3A=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

٣,٢ ضرب صف في عمود:

تعريف ٥: حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حواصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود، وهذا الضرب ليس تبديليا.

مثال ٧: احسب ما يلي:

$$1)\ a=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 4\\ 10\end{pmatrix},\qquad 2)\ b=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}.$$

الحل:

$$1)\ a=(1\times(-3))+((-2)\times 1)+(0\times 4)+(0.3\times 10)=-3-2+0+3=-2$$

2) لا يمكن حساب b لأنّ عدد عناصر الصف لا يساوي عدد عناصر العمود.

تجدر الإشارة إلى أنّه يمكن حساب ضرب العمود في الصف بعد التعريف اللاحق فقط.

٤,٢ ضرب مصفوفتين:

تعريف ٦: حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m\times k$ في مصفوفة من الرتبة $k\times n$ (أي أنّ عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هو مصفوفة من الرتبة $m\times n$، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

مثال ٨: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 30\\ 15 & 0 & -12\\ 23 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

احسب ما يلي:

$$1)\ AB,\qquad 2)\ BA,\qquad 3)\ BC.$$

الحل:

$$1)\ AB=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}5 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 15 & -3\end{pmatrix}$$

$$2)\ BA=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0 & 3\\ 8 & -3 & 6\\ -4 & 5 & -6\end{pmatrix}$$

3) لا يمكن حساب الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى هو 2 بينما عدد صفوف المصفوفة الثانية هو 3.

ملاحظة: من نتائج الفقرتين (1) و (2) من المثال السابق يمكن استنتاج أنّ: $AB \neq BA$ أي أن عملية ضرب المصفوفات غير تبديلي.

نظرية ٣: ضرب المصفوفات تجميعي ولكنه ليس تبديليا.

مثال ٩: احسب ما يلي وقارن مع الفقرة (1) من المثال ٧:

$$A=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 4\\ 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}$$

الحل:

$$A=\begin{pmatrix}-3\times1 & -3\times-2 & -3\times0 & -3\times0.3\\ 1\times1 & 1\times-2 & 1\times0 & 1\times0.3\\ 4\times1 & 4\times-2 & 4\times0 & 4\times0.3\\ 10\times1 & 10\times-2 & 10\times0 & 10\times0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 0 & -0.9\\ 1 & -2 & 0 & 0.3\\ 4 & -8 & 0 & 1.2\\ 10 & -20 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

ومنه نستنتج أنّ:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}$$

أي أنّ ضرب صف في عمود لا يساوي ضرب هذا العمود في الصف السابق لأن الصف هو عبارة عن مصفوفة $1\times n$ والعمود هو عبارة عن مصفوفة $n\times 1$ وضرب المصفوفات ليس تبديلي.

مثال١٠: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0.5\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}.$$

احسب ما يلي:

$$1)\ (AB)C,\qquad 2)\ A(BC).$$

الحل:

$$1)\ (AB)C=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -0.5\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -5\\12 & 10\end{pmatrix}$$

2) نستخدم نتيجة الفقرة 1 من هذا المثال وبأن العملية تجميعية:

$$A(BC)=(AB)C=\begin{pmatrix}-6 & -5\\12 & 10\end{pmatrix}$$

نظرية٤: جمع المصفوفات توزيعي بالنسبة لضربهما ، أي أنّ:

$$1)\ (A+B)C=AC+BC$$
$$2)\ A(B+C)=AB+AC$$

وهذا بالنسبة لثلاث مصفوفات A و B و C من الرتب المواتية لهذه العمليات.